第 27 講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ．

(1)　点 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d が

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることを示せ．

(2)　点 $(2,\ 4)$ から引いた円 $x^2+(y-1)^2=1$ の接線を求めよ．

(3)　円 $x^2+(y-1)^2=25$ と直線 $y=mx+5$ が 2 点 A，B で交わっていて AB$=8$ を満たしているとき，定数 m の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ．

(1)　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ と直線 $x+y+k=0$ を考える．円に直線が接するときの定数 k の値を求めよ．また $k=1$ とし，点Ｐが円周上を動き，点Ｑが直線上を動くとき，点Ｐと点Ｑの距離の最小値を求めよ．

(2)　座標平面上で，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ が直線 $2x-y+k=0$ から切り取る線分の長さが $4\sqrt{5}$ であるとき，定数 k の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$k=-5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

　　㋑　$k=-5\pm\sqrt{5}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{10}$

　　㋒　$k=5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

(2)　㋐　$k=-6,\ 4$　㋑　$k=-4,\ 6$　㋒　$k=1\pm5\sqrt{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　点と直線の距離

27 次の各問いに答えよ．

(1) 点 $(p,\ q)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d が

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることを示せ．

(2) 点 $(2,\ 4)$ から引いた円 $x^2+(y-1)^2=1$ の接線を求めよ．

(3) 円 $x^2+(y-1)^2=25$ と直線 $y=mx+5$ が 2 点 A，B で交わっていて AB=8 を満たしているとき，定数 m の値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $y=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}(x-2)+4$　(3) $m=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

【解答】

(1) 点 $(p,\ q)$ を P とし，点 P から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を H とする．

H は直線 $ax+by+c=0$ に垂直で点 $(p,\ q)$ を通る直線上の点であるから，実数 k を用いて $\mathrm{H}(ak+p,\ bk+q)$ と表せ，この点が直線 $ax+by+c=0$ 上にあるので

$$a(ak+p)+b(bk+q)+c=0$$

$$\therefore\quad k=-\frac{ap+bq+c}{a^2+b^2}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k(a,\ b)$ より

$$d=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|k|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を得る．

(2) 点 $(2,\ 4)$ を通り y 軸に平行な直線 $x=2$ は円 $x^2+(y-1)^2=1$ の接線にはならないので，求める接線の傾きを m としてその接線は $y=m(x-2)+4$ すなわち $mx-y-2m+4=0$ と表せる．

この直線と円の中心$(0,\ 1)$ との距離が，円の半径の 1 と等しいので

$$\frac{|m\cdot0-1-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|-2m+3|=\sqrt{m^2+1}$$

$$4m^2-12m+9=m^2+1$$

$$3m^2-12m+8=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$$

よって求める接線は　$\boldsymbol{y=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}(x-2)+4}$

$$\therefore\quad y=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}x\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}\quad（複号同順）$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　円の中心を C(0, 1)，AB の中点を M とすると，AB は円の弦となるので AM＝BM となり，CA は円の半径になるので，三平方の定理より

$$\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2=\mathrm{CA}^2$$

$$\mathrm{CM}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AM}^2$$

よって $\mathrm{CM}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ であるが，長さ CM は直線 $y=mx+5$ すなわち $mx-y+5=0$ と点 C(0, 1) との距離であるので

$$\frac{|m\cdot 0-1+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$

$$4=3\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　点と直線の距離

27　次の各問いに答えよ．

(1)　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ と直線 $x+y+k=0$ を考える．円に直線が接するときの定数 k の値を求めよ．また $k=1$ とし，点 P が円周上を動き，点 Q が直線上を動くとき，点 P と点 Q の距離の最小値を求めよ．

(2)　座標平面上で，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ が直線 $2x-y+k=0$ から切り取る線分の長さが $4\sqrt{5}$ であるとき，定数 k の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$k=-5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

㋑　$k=-5\pm\sqrt{5}$，最小値 $3\sqrt{2}-\sqrt{10}$

㋒　$k=5\pm\sqrt{10}$，最小値 $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

(2)　㋐　$k=-6,\ 4$　㋑　$k=-4,\ 6$　㋒　$k=1\pm5\sqrt{5}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑

【解答】

(1)　直線 $x+y+k=0$ と円の中心 $(2,\ 3)$ との距離は $\dfrac{|2+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{2}}$ である．円に直線が接するとき，この距離が半径 $\sqrt{5}$ に等しいので

$$\frac{|k+5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}\qquad \therefore\ \ \boldsymbol{k=-5\pm\sqrt{10}}$$

また $k=1$ のとき，この距離は $\dfrac{|1+5|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ になることと，半径が $\sqrt{5}$ であることより，P と Q の距離の最小値は

$$\boldsymbol{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

(2)　円の半径が 5 であることより，円の中心 $(1,\ 3)$ と直線 $2x-y+k=0$ との距離が

$$\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}$$

すなわち $\sqrt{5}$ となればよいので

$$\frac{|2\times1-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|k-1|=5$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{k=-4,\ 6}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。